הפקולטה למתמטיקה
בטכניון

חדו"א 1מ2 — 104042

מבחן סוף סמסטר מועד א', חורף - 14.02.25

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 5 שאלות בחירה מרובה. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה.
משקל כל שאלה בחלק זה הוא 8 נקודות.

1. נתונה $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x>0\\ e^{\frac{1}{x}} & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$. אזי

(א) הפונקציה רציפה בכל נקודה

(ב) קיים $b>0$ עבורו $f(x)$ פונקציה עולה ממש בקטע $(0,b)$

(ג) $f'_-(0)$ קיים

(ד) f גזירה בקטע $[0,1]$

2. נתונים האינטגרלים המוכללים

$$I=\int_1^\infty (\pi-2\arctan x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$II=\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+x)}dx$$

(א) שני האינטגרלים המוכללים אינם מתכנסים

(ב) I מתכנס ו-II אינו מתכנס

(ג) I אינו מתכנס ו-II מתכנס

(ד) שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים

3. נתונים הטורים

$$I=\sum_{n=1}^\infty\sqrt{\left(\tan\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$$

$$II=\sum_{n=1}^\infty\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^4}$$

(א) I אינו מתכנס ו-II מתכנס

(ב) שני הטורים אינם מתכנסים

(ג) I מתכנס ו-II אינו מתכנס

(ד) שני הטורים מתכנסים

4. נתונה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) אם $\lim_{x\to x_0^+}f(x),\ \lim_{x\to x_0^-}f(x)$ קיימים ושווים לכל x_0 אז f רציפה בכל נקודה

(ב) אם f איזוגית אז היא רציפה ב- $x=0$

(ג) אם f רציפה בכל נקודה, וגם גזירה בכל נקודה פרט לנקודה $x=0$, וגם $f'(x)>0$ לכל $x\neq 0$, אז f עולה ממש

(ד) אם $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ וגם $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ אז $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על

5. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית עבורה $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל אינדקס n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ב) אם $a_n + b_n, a_n \cdot b_n$ סדרות מתכנסות, אז a_n, b_n שתיהן מתכנסות

(ג) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים וחיובי ו- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ אינו קיים, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ אינו קיים

(ד) אם $a_n \leq b_n \leq a_{n+1}$ לכל אינדקס n אז : a_n מתכנסת $\iff$ b_n מתכנסת

חלק ב'

יש לרשום <u>בעמודים הבאים</u> פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

6. (30 נקודות) בשאלה זו אין בהכרח קשר בין הסעיפים.

(א) (10 נקודות)

חשבו את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3}dx$$

(ב) (10 נקודות)

מיצאו מספר רציונלי שהמרחק שלו מ- $\sqrt{20}$ הוא לכל היותר $\frac{1}{200}$.

(ג) (10 נקודות) הוכיחו כי $f(x) = x^5 + x^{\frac{1}{3}} + 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא חח"ע ועל, והוכיחו כי f^{-1} גזירה בנקודה $y = 3$ ומיצאו את $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

7. (30 נקודות)

בשאלה זו אין בהכרח קשר בין הסעיפים.

(א) (10 נקודות) הוכיחו כי אם $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ גזירות, וגם $f(a) = g(a),\ f(b) = g(b)$ וגם $f'(x) \leq g'(x)$ לכל $a < x < b$, אז $f(x) = g(x)$ לכל $a \leq x \leq b$.

(ב) (10 נקודות) חשבו את הגבול של הסדרה

$$a_n = \frac{1 - 2 + \cdots + (-1)^{n+1} n}{n^2 \ln n}, \quad n \geq 2$$

(ג) (10 נקודות) חשבו את הגבול הבא אם הוא קיים במובן הרחב, או הסבירו מדוע אינו קיים במובן הרחב.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x}^{x^2}\frac{t}{\cos t}dt}{\sin^2 x}.$$